ルート（根号）が入った積分まとめ　月　日

はじめに

ルート（根号）が入った積分を苦手と感じている高校生は結構多いかと思います．ここでは，ルートの入った積分の代表的な方針を 3 つ紹介し，それらをいつ使うのかについても触れています．

ルートの積分の代表的な方針

方針1.　有理化する．

方針2.　$t = \sqrt{ax+b}$という様に置き換える（ルート丸ごと置き換え）．

方針3.　$t = x + \sqrt{ax^2+b}$という様に置き換える．

これらの方針を使う問題は次の様な場合です．

方針1.　有理化する．

この方針は，**分母が$\sqrt{ax+b}+c$の様な形**，かつ，**分子にxが入っている**ときに使われる（これを使った解答が想定されている）可能性が高いです．

方針1を用いる積分の例

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+9}+3}dx$, (2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}dx$

有理化してみれば分かると思いますが，これらは有理化すると分母を綺麗に払えるパターンとなっています．この有理化という解き方で解くと速い積分は，実をいうと方針2を用いても解けてしまうことが多いので，私個人としては正直覚えなくてもいいと思っています．

方針2.　$t = \sqrt{ax+b}$という様に置き換える（ルート丸ごと置き換え）．

この方針は，**根号の中が一次式のとき**に使われることが多いです．おそらく，この方針での計算がほとんどになると思うので，**ルートの積分ではまずはこの方針を使いましょう．**

方針2を用いる積分の例

例はありません．ほとんどの問題で積極的に使っていこう！三乗根もこれでいけるよ．

置き換えた後は，$a\ dx = 2t\ dt$という様になるので普通に置換積分しましょう．（三乗根の時は$a\ dx = 3t^2\ dt$）

ただし，この方針は計算が長くなりやすいです．

方針1が使える問題では，そちらを使った方がもちろん速いのです．しかし，計算スピードを鍛えてしまえば「計算が長引いて解き終わらなかった〜」なんてことにはなりませんのでご心配なく．計算スピードは筋肉です．全てを解決します．

方針3.　$t = x + \sqrt{ax^2 + b}$という様に置き換える.

この方針は，$\sqrt{ax^2+b}$（ルートの中にx^2がありxはない）が登場する，かつ分子にxが入っていないとき使われることが多いです.

この手の問題のタチの悪いところとして，①方針2で解けない，②計算の難易度が高いという2点が挙げられると思います．予想ですが，この特殊なパターンのせいでルートの積分が苦手と感じている高校生が増えているのではないかと私は考えています．置き換え方が直感的じゃないですし.

方針3を用いる積分の例

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx,\ (2) \int \sqrt{x^2+1}\, dx,\ (3) \int \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} dx$$

少し計算してみようとすればこれらの問題が方針2で解けないことはわかるかと思います．そして，計算難易度が高いという話ですが，具体的にはこれらを計算する中で必要となる，

$$(1),(2) \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{t} dt, \qquad (3) dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) dt$$

これらの式を求めることが難しいということになります．これらは間違いなくコツが必要な部類の計算になるので，初見ではかなり厳しいでしょう.

（1）は上の式が出せればそのまま置き換えて終わりです.

（2）は，実は（1）の形を作るために部分積分が必要なので，より計算の難易度が高いです.

（3）は，置き換えの式をxについて解いてから微分することになります．テクいです.

次のページからは，上で挙げた具体例の解き方について記述します.

＜方針1の例題＞

$$
\begin{aligned}
(1) \int \frac{x}{\sqrt{x+9}+3}dx &= \int \frac{x(\sqrt{x+9}-3)}{(\sqrt{x+9}+3)(\sqrt{x+9}-3)}dx \\
&= \int \frac{x(\sqrt{x+9}-3)}{x+9-9}dx \\
&= \int (\sqrt{x+9}-3)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2) \int \frac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}dx &= \int \frac{(x+1)(\sqrt{x+5}+2)}{x+5-4}dx \\
&= \int (\sqrt{x+5}+2)dx
\end{aligned}
$$

＜方針2の例題＞

この方針はほとんどのルートの積分で使うので例題はなしですが，置き換え後の計算を少し記述します.

$$
\begin{aligned}
t = \sqrt{2x+5} &\Rightarrow t^2 = 2x+5 \\
&\Rightarrow x = \frac{t^2-5}{2} \\
&\Rightarrow \frac{d}{dt}x = t \\
&\Rightarrow dx = t\ dt
\end{aligned}
$$

＜方針3の例題＞

(1),(3)に関しては置き換え後の難しい部分の計算を，(2)に関しては部分積分の取り掛かりの部分の計算を記述します.

$$
\begin{aligned}
(1) t = x + \sqrt{x^2+1} &\Rightarrow \frac{d}{dx}t = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x \\
&\Rightarrow \frac{d}{dx}t = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} \\
&\Rightarrow \frac{d}{dx}t = \frac{t}{\sqrt{x^2+1}} \\
&\Rightarrow \frac{1}{t}dt = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3)t = x + \sqrt{x^2-1} &\Rightarrow (t-x)^2 = x^2 - 1 \\
&\Rightarrow x^2 - 2tx + t^2 = x^2 - 1 \\
&\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \\
&\Rightarrow dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\int \sqrt{x^2+1}dx &= \sqrt{x^2+1}\int dx - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(\int dx\right)dx \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx \\
&= x\sqrt{x^2+1} - \int \sqrt{x^2+1}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx
\end{aligned}
$$

(2)では部分積分を『ズラしてマイナス前微分』という要領で行なっています．わかりにくい方は普段使ってる正攻法で計算し直してみてください．