はじめに

グラフが出てくるタイプの問題として代表的な問題を 3 つ紹介，それらの解くポイントについて触れてみようと思います.

代表的な二次関数の問題

1. グラフや定義域が変化する設定で，最大値・最小値を求める問題.
2. 式の一部を置き換えして解き進める問題.
3. 交点の数に触れている問題.

これらの問題を解く際の**ポイント**は次の通りです.

1. グラフや定義域が変化する設定で，最大値・最小値を求める問題.
   →グラフの軸と定義域の中央に着目する.
   ※定義域の中央とは，定義域が$0 < x < 2$であれば$x = 1$のことです.

Table 1: 場合分けの仕方

	下に凸（aが正）	上に凸（aが負）
最大値	軸が，定義域中央の左側，一致，右側	軸が，定義域の左外，中，右外
最小値	軸が，定義域の左外，中，右外	軸が，定義域中央の左側，一致，右側

2. 式の一部を置き換えして解き進める問題.
   →置き換えた後，定義域を確認する.
   二次関数の問題に関係なく，文字で置き換えをしたときには，置き換えた文字のとることのできる範囲を確認しましょう.
3. 交点の数に触れている問題.
   →①D（判別式）を使う．②特定の言い回しに慣れる.
   特定の言い回しとは次のようなものです.
   - 『接する.』→交点 1 つ．→$D = 0$
   - 『全ての実数に対して$ax^2 + bx + c > 0$が成り立つ』→交点なし→$D < 0$
   - 『解を持つ.』→交点を持つ（1個か2個）→$0 \leq D$

次のページからは具体的な問題と，取り掛かりの部分までを記述します.

下に凸，最小値，グラフが動く問題

関数$y = x^2 - 2ax + a^2 - 2a(0 \leq x \leq 2)$の最小値が11となるような正の定数$a$を求めよ.

＜解答の指針＞

- グラフの軸→$\underline{x = a}$，定義域の中央→$\underline{x = 1}$
- 下凸，最小値問題→軸が，定義域の左外，中，右外で場合分け
- 軸$<$定義域左端→$\underline{a < 0}$，軸が定義域の中→$\underline{0 \leq a \leq 2}$，定義域右端$<$軸→$\underline{2 < a}$，

解答 $a = 7$

式の一部を置き換えして解き進める問題

$-2 \leq x \leq 1$のとき，関数$y = (x^2+2x)^2 - 4(x^2+2x) - 4$の最大値，最小値を求めよ．

＜解答の指針＞

- 文字で置き換え．$t = x^2 + 2x$（このままだと$y = t^2 - 4t - 4(? \leq t \leq ?)$で困る．）
- $t = x^2 + 2x(-2 \leq x \leq 1)$の最大値・最小値を求める．→最大値3，最小値$-1$
- $y = t^2 - 4t - 4(-1 \leq t \leq 3)$の最大値・最小値を求める．（答えは$t$を使って書かないこと）

解答 $x = -1$のとき最大値1，$x = -1 + \sqrt{3}$のとき最小値-8

交点の数に触れている問題

全ての実数xに対して，二次不等式$x^2+(k+3)x-k>0$が成り立つような定数kの値の範囲を求めよ.

＜解答の指針＞

- 『全ての実数xに対して不等式が成り立つ』→判別式を使いそう（推測）
- 下凸二次関数$x^2+(k+3)x-k$のグラフがx軸より常に上側→交点持たない→$D<0$（断定）

解答 $-9<k<-1$